Wittgenstein, Cantor und unendliche Mengen

Hausarbeit zum Seminar
„Philosophie der Mathematik“
Dr. Wolfgang Kienzler, Friedrich-Schiller-Universität Jena, WS 2003/04

Johannes Wollbold, Blumenstr. 88, 99092 Erfurt
Tel. 0361/5401437, eMail jwollbold@gmx.de

23. November 2004

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

> "There is a truth in Schopenhauer's view that philosophy is an organism, and that a book on philosophy, with a beginning and an end, is a sort of contradiction." (Wittgenstein in einer Vorlesung 1933/34, zitiert nach [Ms, Register 1-5, XVI].)

Ludwig Wittgenstein (1889-1951) sieht Philosophie als Entdeckungsreise in einem Netz von Bedeutungen an: von Bekanntem aus erkundet er neue Wege, nähert sich alten Einsichten von einer neuen Seite aus an. So konnte er - nach dem *Tractatus* - seine Gedanken nie in die Form eines abgeschlossenenen, gar deduktiv argumentierenden Buchs zwingen, sondern reihte sie in loserer Folge aneinander, griff das gleiche Thema häufig wieder auf.

Auch in dieser Arbeit war es schwierig, einige von Wittgensteins Bemerkungen zum Thema Unendlichkeit in der Mathematik in Form einer Reihe nachzuvollziehen; Wiederholungen ließen sich nicht ganz vermeiden, und einige Bezüge werden durch Querverweise angezeigt. (Auch legt Cantors Diagonalverfahren den Verdacht nahe, dass man immer einen aus der Reihe springenden Gedanken konstruieren könnte...) Zur Orientierung werde ich jedoch von zwei größeren Textabschnitten ausgehen und diese in ihrem inneren Zusammenhang (jedoch keineswegs vollständig) sowie dem mit anderen Textstellen interpretieren:

- ZUR MENGENLEHRE aus dem *Big Typescript*, redigiert 1933 [BT, 488-95].
- TEIL II der *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik* von 1938 [BGM, 125-42].

Im Mittelpunkt steht die Frage, ob der Begriff „unendlich" im Sinn einer Gesamtheit von Objekten aufgefasst werden kann, besonders im Zusammenhang mit Dezimalentwicklungen einer irrationalen Zahl und Mengen. In den beiden Texten setzt sich Wittgenstein mit klassischen Theorien dazu auseinander: Dedekinds Definition irrationaler Zahlen duch Schnitte und Cantors Begründung der Mengenlehre.

2 Mathematische Kalküle mit dem Unendlichen

2.1 Der Dedekindsche Schnitt

In seiner Schrift *Stetigkeit und irrationale Zahlen* von 1872 beschreibt Richard Dedekind (1831-1916) eine Konstruktion zur Einführung der irrationalen Zahlen. Sein Ziel dabei ist eine „wirklich wissenschaftliche Begründung der Arithmetik" [Ded12, Vorwort], ohne die geometrische Anschauung zu Hilfe zu nehmen, jedoch in Analogie zur Geometrie.

Man kann jede rationale Zahl eindeutig einem Punkt einer Geraden zuordnen. Trägt man jedoch inkommensurable Längen wie $\sqrt{2}$, die Diagonale des Einheitsquadrats, von einem Nullpunkt aus ab, „so erhält man einen Endpunct, welcher keiner rationalen Zahl entspricht" [Ded12, §3]. Will man nun die Geometrie vollständig arithmetisieren, so muss man neue Zahlen erschaffen, so dass eine bijektive Zuordnung zwischen Zahlen und Punkten möglich ist.

Einen Schnitt nennt Dedekind eine Einteilung der rationalen Zahlen in 2 Klassen A_1 und A_2, so dass jede Zahl in A_1 kleiner als jede Zahl in A_2 ist. Ein Schnitt wird durch eine rationale Zahl a hervorgebracht, wenn für alle $a_1 \in A_1$ und $a_2 \in A_2$ gilt:

$a_1 < a \leq a_2$ oder $a_1 \leq a < a_2$. Es existieren jedoch auch unendlich viele Schnitte, die nicht durch rationale Zahlen hervorgebracht werden, z.B. wenn Kriterium ist, ob das Quadrat einer Zahl größer oder kleiner als eine positive ganze Zahl D ist, die keine Quadratzahl ist. Ein solcher Schnitt definiert eine irrationale Zahl. Diese lassen sich anordnen, und somit ist ein Schnitt auch im System aller reellen Zahlen möglich. Dedekind weist nach, dass eine und nur eine reelle Zahl α existiert, durch welche eine solche Zerlegung hervorgebracht wird.[1] Die mit diesem Satz gegebene Eigenschaft der rellen Zahlen definiert für Dedekind Stetigkeit, in Analogie zur Stetigkeit bzw. Vollständigkeit der Geraden.

Darauf aufbauend lassen sich auch die Prinzipien der Infinitesimalanalysis streng begründen. Dedekind führt dies in [Ded12, §7] für den Satz durch: Wächst eine Größe x beständig, aber nicht über alle Grenzen, so nähert sie sich einem Grenzwert.

2.2 Cantors Diagonalverfahren

2.2.1 Prinzipien der Cantor'schen Mengenlehre

Zunächst sollen Definitionen, Sätze und philosophische Auffassungen genannt werden, mit denen sich L. Wittgenstein in den betrachteten Texten auseinandersetzt; insbesondere wird der Zusammenhang skizziert, in dem das Diagonalverfahren steht. Dabei bleiben etwa die Theorie der Ordnungszahlen und ihre Beziehung zu derjenigen der Kardinalzahlen unberücksichtigt, sowie die Arithmetik der Kardinalzahlen.

Den Mengenbegriff definiert Georg Cantor (1845-1918) folgendermaßen:

> Unter einer „Menge" verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen[2] Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die „Elemente" von M genannt werden) zu einem Ganzen. [Can95, §1]

Die Mächtigkeit oder Kardinalzahl einer Menge ergibt sich dadurch, „daß von der Beschaffenheit ihrer verschiedenen Elemente m und von der Ordnung ihres Gegebenseins abstrahiert wird." [Can95, §1] Zwei Mengen haben genau dann dieselbe Kardinalzahl, wenn sie äquivalent sind, d.h. „wenn es möglich ist, dieselben gesetzmäßig in eine derartige Beziehung zueinander zu setzen, daß jedem Element der einen von ihnen ein und nur ein Element der anderen entspricht." [Can95, §1] Cantor unterscheidet verschiedene (Äquivalenz-)Klassen von Mengen, entsprechend deren Mächtigkeit [Can79, Nr. 1]:

- Bei endlichen Mengen fällt die Mächtigkeit mit der Anzahl der Elemente zusammen.

[1] „Zerfällt das System $\mathfrak{R}$ aller reellen Zahlen in zwei Classen $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ von der Art, daß jede Zahl α_1 der Classe $\mathfrak{A}_1$ kleiner ist als jede Zahl α_2 der Classe $\mathfrak{A}_2$, so existiert eine und nur eine Zahl α, durch welche diese Zerlegung hervorgebracht wird." [Ded12, §5 IV.]

[2] „Eine Mannigfaltigkeit (ein Inbegriff, eine Menge) von Elementen, die irgendwelcher Begriffssphäre angehören, nenne ich *wohldefiniert*, wenn auf Grund ihrer Definition und infolge des logischen Prinzips vom ausgeschlossenen Dritten es als *intern bestimmt* angesehen werden muß, *sowohl* ob irgendein derselben Begriffssphäre angehöriges Objekt zu der gedachten Mannigfaltigkeit gehört oder nicht, *wie auch*, ob zwei zur Menge gehörige Objekte, trotz formaler Unterschiede in der Art des Gegebenseins einander gleich sind oder nicht." [Can79, Nr. 3] Wie im Beispiel der damals noch unentschiedenen Frage, ob π zur Menge aller algebraischen Zahlen [Fußnote 29] gehört, muss nur ein eindeutiges Kriterium für die betreffenden Entscheidungen vorliegen, diese brauchen jedoch nicht nach aktuellem Stand der Mathematik tatsächlich ausführbar zu sein.

- Unendliche, „transfinite“ Mengen heißen abzählbar, wenn sie der Menge der natürlichen Zahlen äquivalent sind. [Can79, Nr. 3] Es lassen sich im Vergleich zu endlichen Mengen überraschende Folgerungen ziehen: Jede unendliche Teilmenge einer abzählbaren Menge ist wieder abzählbar, hat also die gleiche Kardinalzahl (mit $\aleph_0$ bezeichnet). Bemerkenswert ist auch, dass die Menge der rationalen Zahlen abzählbar ist. Dies beweist Cantor mit Hilfe seines ersten Diagonalverfahrens.[3]

- Als ganz neu betrachtet Cantor selbst seine Idee, den Zahlbegriff zu erweitern und eine unendliche Folge voneinander unterschiedener unendlicher Kardinalzahlen zu definieren. [Can79, Nr. 5 §1]. Grundlegend dafür ist das zweite Diagonalverfahren - der Beweis, dass überhaupt nichtabzählbare unendliche Mengen existieren: die Menge der reellen Zahlen oder - äquivalent dazu - ein stetiges Intervall (Kontinuum). Cantor hatte für Mächtigkeiten eine Größenordnung festgelegt [Can95, §2] und versuchte zu beweisen, dass jede Punkt- (oder Zahlen-)Menge entweder abzählbar ist oder die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ des Kontinuums hat [Can79, Schlussbemerkung], und somit keine Kardinalzahl zwischen $\aleph_0$ und $\mathfrak{c}$ liegt, sondern gilt $\mathfrak{c} = \aleph_1$.[4]

- Zu jeder Menge M gibt es eine Menge von größerer Mächtigkeit, und zwar die Menge aller Teilmengen von M. [Can79, Nr. 5]

Vor Cantor war in der Mathematik meist nur von uneigentlich bzw. potentiell Unendlichem die Rede, „in der Bedeutung einer veränderlichen, entweder über alle Grenzen hinaus wachsenden oder bis zu beliebiger Kleinheit abnehmenden, aber stets *endlich* bleibenden Größe“ [Can79, Nr. 5 §1]. Cantor meint, in neuerer Zeit habe jedoch ein davon zu unterscheidender Begriff Verwendung gefunden, der des eigentlich oder aktual Unendlichen.[5] Dieses lasse sich nicht auf Beziehungen endlicher Zahlen zurückführen. In den unendlichen Kardinalzahlen sieht Cantor „konkrete Zahlen von realer Bedeutung“; sie gehören zu den „Formen und Affektionen des Eigentlich-unendlichen.“ Damit ist eine unendliche Menge eine aktual unendliche Gesamtheit von Elementen.

[3]Die rationalen Zahlen lassen sich in einem zweidimensionalen Schema anordnen und entsprechend der Pfeile abzählen. Dabei müssen nur noch doppelt vorkommende Zahlen wie $\frac{2}{2}$ gestrichen werden.

$$\begin{array}{cccccccccc}
0 & \longrightarrow & 1 & \longrightarrow & -1 & \longrightarrow & 2 & \longrightarrow & -2 & \dots \\
 & & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
 & & \frac{1}{2} & & -\frac{1}{2} & & \frac{2}{2} & & -\frac{2}{2} & \dots \\
 & & \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \\
 & & \frac{1}{3} & & -\frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & & -\frac{2}{3} & \dots \\
 & & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
 & & \frac{1}{4} & & \dots & & \dots & & &
\end{array}$$

[4]Dies ist die berühmte Kontinuumhypothese. Ihr Beweis oder ihre Widerlegung war eines der 23 Probleme, die Hilbert auf dem 2. Internationalen Mathematikerkongress 1900 in Paris der mathematischen Öffentlichkeit vorlegte. Gödel bewies 1938, dass die Kontinuumhypothese nicht widerlegt werden kann. Genauer gesagt: Führt die Mengenlehre (nach dem Axiomensystem von Zermelo-Fraenkel, aber ohne das Auswahlaxiom) mit der Kontinuumhypothese zu einem Widerspruch, so liegt dieser bereits in der Mengenlehre. P.J. Cohen zeigte dann 1963, dass die Kontinuumhypothese im Rahmen der Mengenlehre ohne Auswahlaxiom nicht beweisbar ist. Somit ist ein Mathematiker frei, sie seinen Axiomen hinzuzufügen oder auf sie zu verzichten. [Ker83, 85f.]

[5]In der Funktionentheorie ergänzt man den Definitionsbereich, die Menge der komplexen Zahlen, um einen einzigen unendlich entfernten, aber bestimmten Punkt. Das Verhalten der Funktion (Grenzwerte, Stetigkeit, Ableitungen) kann genauso wie an jedem endlichen Punkt untersucht werden.

2.2.2 Beweis der Nichtabzählbarkeit eines reellen Intervalls

Bereits 1874[6] und 1879 [Can79, Nr. 1] hatte Cantor zwei Versionen eines Beweises für folgenden Satz veröffentlicht:

> Hat man eine einfach unendliche Reihe[7] $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\nu, ...$ von reellen, ungleichen Zahlen, die nach irgendeinem Gesetz fortschreiten, so läßt sich in jedem vorgegebenen Intervalle $(\alpha ... \beta)$ eine Zahl η (und folglich lassen sich deren unendlich viele) angeben, welche n i c h t in jener Reihe (als Glied derselben) vorkommt.

Für den - nicht einschränkenden - Spezialfall, dass die reellen Zahlen der Reihe bereits im Intervall $[0, 1]$ enthalten sind, gab er in [Can90] einen noch einfacheren, klassisch gewordenen Beweis.

Vorausgesetzt ist, dass jede reelle Zahl dieses Intervalls durch eine Dualfolge $E = (x_1, x_2, ..., x_\nu, ...)$, $x_i \in \{0, 1\}$ dargestellt wird - in anderer Notation z.B. 0,0110101... oder 0,111.... Angenommen, eine solche Reihe ist gegeben:

$$
\begin{aligned}
E_1 &= (a_{1,1}, a_{1,2}, ..., a_{1,\nu}, ...), \\
E_2 &= (a_{2,1}, a_{2,2}, ..., a_{2,\nu}, ...), \\
&\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
E_\mu &= (a_{\mu,1}, a_{\mu,2}, ..., a_{\mu,\nu}, ...), \\
&\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .
\end{aligned}
$$

Es sei nun eine Dualfolge $E_0 = (b_1, b_2, ..., b_\nu, ...) \in [0, 1]$ so definiert, dass jedes b_ν von $a_{\nu,\nu}$ - also von einem Element der *Diagonalen* des obigen Systems - verschieden ist. Dann kann die Gleichung $E_0 = E_\mu$ für keinen positiven ganzzahligen Wert von μ erfüllt sein, da sonst $b_\mu = a_{\mu,\mu}$ gelten müsste. E_0 gehört somit nicht zur vorgegebenen Reihe. Da das Argument für eine beliebige Reihe gilt, lässt sich die „Gesamtheit aller Elemente" des Intervalls nicht in die Reihenform $E_1, E_2, ..., E_\nu, ...$ bringen.

3 Drei Themen der Philosophie Wittgensteins

Um einen Hintergrund der Bemerkungen zur Unendlichkeit anzudeuten, erläutere ich zunächst einige Begriffe, die nicht nur im Rahmen von Wittgensteins Philosophie der Mathematik wichtig sind.

3.1 Bedeutung, Sinn und Grammatik

[Ger96, 172-74] Wittgenstein wendet sich einerseits gegen den Psychologismus, eine „anarchistische" Position, nach der Kriterium für die Wahrheit eines mathematischen Satzes nur ist, dass der Einzelne eben in einer bestimmten Weise denkt. Übereinstimmung gibt es höchstens aufgrund von Gemeinsamkeiten des menschlichen Denkens. Wittgenstein folgt hier Frege, der kritisiert hatte: „Wenn wir nichts erfassen könnten, als was in uns selbst ist, so wäre ein Widerstreit der Meinungen, eine gegenseitige Verständigung unmöglich, weil ein gemeinsamer Boden fehlte, und ein solcher kann

[6] Georg Cantor, Über eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen: *Crelles Journal f. Mathematik*, Bd. 77, 1874, 258-262, in: [Can32, 115-118]

[7] Wird in dieser Arbeit der mathematische Begriff einer Reihe verwendet, so ist darunter immer - entsprechend dem Sprachgebrauch Cantors und Wittgensteins - eine Folge in der heute üblichen Bedeutung zu verstehen.

keine Vorstellung im Sinne der Psychologie sein. Es gäbe keine Logik, die berufen wäre, Schiedsrichterin im Streite der Meinungen zu sein.“[8]

Wittgensteins Antwort ist jedoch keine Metaphysik der Objektivität in der Tradition des Platonismus, wie sie etwa sein Cambridger Freund G.H. Hardy vertrat: „317 is a prime not because we think so, or because our minds are shaped in one way rather than another, but *because it is so*, because mathematical reality is built that way.“ Ähnlich haben für Cantor Zahlen nicht nur eine intersubjektive, immanente, sondern gleichzeitig eine transsubjektive, transiente Realität, insofern als „die verschiedenen Zahlenklassen ... Repräsentanten von Mächtigkeiten sind, die in der körperlichen und geistigen Natur tatsächlich vorkommen.“ [Can79, Nr. 5 §8] Diesen metaphysischen Zusammenhang begründet er mit der „Einheit des Alls, zu welchem wir selbst mitgehören“, fordert aber auch, die Mathematik brauche ihre Begriffsbildungen nicht auf ihre transiente Realität hin zu prüfen; unfruchtbare Begriffe würden von selbst fallen gelassen. Schon im *Tractatus logico-philosophicus* heißt es dagegen, dass mathematische Sätze keine Behauptungen über Objekte sind:

> 6.2 Die Mathematik ist eine logische Methode.
> Die Sätze der Mathematik sind Gleichungen, also Scheinsätze.
> 6.21 Der Satz der Mathematik drückt keinen Gedanken aus.
> 6.211 Im Leben ist es ja nie der mathematische Satz, den wir brauchen, sondern wir benützen den mathematischen Satz *nur*, um aus Sätzen, welche nicht der Mathematik angehören, auf andere zu schließen, welche gleichfalls nicht der Mathematik angehören.
> (In der Philosophie führt die Frage: „Wozu gebrauchen wir eigentlich jenes Wort, jenen Satz?“ immer wieder zu wertvollen Einsichten.)

In den frühen 30er Jahren heißt es dann: „Die Bedeutung ist die Rolle die das Wort im Kalkül spielt.“ [PG, 63.27], s.a. [PG, 56.19 ff.]. Also besteht „die Bedeutung eines Wortes zu lernen darin, dass man sich eine den Gebrauch des Wortes bestimmende Regel (oder einen Komplex von Regeln) aneignet.“ [HH90, 234] In [PG, 64.28] fragt Wittgenstein nach dem Anzeichen, dass ein Kind das Wort „vielleicht“ nicht nur nachspricht, sondern wirklich versteht: „Nun, daß es [dieses] in bestimmten Fällen in bestimmter Weise - in gewissen Satzverbindungen und in bestimmtem Tonfall - gebraucht.“ Der Begriff „Bedeutung“ bezieht sich somit auf Worte, „Sinn“ dagegen auf Sätze [TLP, 3.3]: „Der durch den Beweis bewiesene Satz dient als Regel, also als Paradigma. Denn nach dieser Regel *richten* wir uns. Aber bringt uns der Beweis nur dazu, daß wir uns nach dieser Regel richten (sie anerkennen), oder zeigt er uns auch, *wie* wir uns nach ihr richten sollen? Der mathematische Satz soll uns ja zeigen, was zu sagen SINN hat.“ [BGM, 163.28] Zum Verstehen des Sinns von Aussagen über Sachverhalte - die ja durch mathematische Sätze ineinander überführt bzw. voneinander abgeleitet werden können -, gilt: „Einen Satz verstehen, heißt, wissen was der Fall ist, wenn er wahr ist.“ [TLP, 4.024] Bei mathematischen Sätzen bedeutet dies, dass man die Richtung eines Beweises angeben kann, also sinnvolle Sätze, die ihn begründen würden [PB, 170.148]. Generell besteht der Sinn eines Satzes in Vorstellungen und Gefühlen, die ihn begleiten; wichtiger sind jedoch sprachliche Konsequenzen, etwa Sätze, mit denen man seinen Sinn erklären kann. Sätze erläutern einander gegenseitig; ein Satz ist ein „Glied in einem System von Konsequenzen“, steht in logischer Beziehung zu anderen Sätzen [PG, 152f.].

Das gesamte System von Regeln für den korrekten Gebrauch von Worten, Ausdrücken und Sätzen ist die Grammatik [Glo00, Art. Grammatik]. Diese Regeln können in

[8] Gottlob Frege. *Grundgesetze der Arithmetik.* Bd. I, Jena 1893, XIX.

„grammatischen Sätzen“ ausgedrückt werden. Sie brauchen keine metasprachlichen Aussagen (z.B. syntaktische oder schulgrammatische Regeln) zu sein, sondern wichtig ist nur, dass wir sie als Standard linguistischer Korrektheit verwenden. Es kann sich daher auch um Erklärungen der Bedeutung handeln wie Zeigen und Benennen [HH90, 231f.], Definitionen oder Beispiele. Und: „Bedenken wir, wir werden in der Mathematik von *grammatischen* Sätzen überzeugt; der Ausdruck, das Ergebnis, dieser Überzeugtheit ist also, daß wir *eine Regel annehmen*. Nichts ist wahrscheinlicher, als daß der Wortausdruck des Resultats eines mathematischen Beweises dazu angetan ist, uns einen Mythus vorzuspiegeln.“ [BGM, 162.26]

Wittgenstein unterscheidet später zwischen Oberflächen- und Tiefengrammatik von Worten [PU, §664]; letztere bezeichnet den globalen Gebrauch von Ausdrücken. Untersuchung der Tiefengrammatik deckt Unsinn in philosophischen Positionen auf: „Was ich lehren will, ist: von einem nicht offenkundigen Unsinn zu einem offenkundigen übergehen.“ [PU, §464] Ein Hauptanliegen Wittgensteins auch bei seiner Kritik des Begriffs „unendlich“ ist es, von Scheinproblemen zu befreien - hier eine englische Formulierung voller Energie und Optimismus [PB, 177]:

> Whatever one can tackle is a problem. (So mathematics is all right.)

In Wittgensteins mittlerer Periode (nach dem *Tractatus* bis Mitte der 30er Jahre) stellen die grammatischen Regeln *das* Fundament der Semantik dar: „Hinter die Regeln kann man nicht dringen, weil es kein Dahinter gibt.“ [PG, 244] Noch schärfer formuliert: „Die Grammatik ist keiner Wirklichkeit Rechenschaft schuldig. Die grammatischen Regeln bestimmen erst die Bedeutung (konstituieren sie) und sind darum keiner Bedeutung verantwortlich und insofern willkürlich.“ [PG, 133]

3.2 Sprachspiel

[Ger96, 174-78] In der Folgezeit erweitert Wittgenstein diese Sicht. Das Konzept des Sprachspiels löst das der Regel in seiner Sonderstellung ab, es gilt aber immer noch: „Das Folgen nach der Regel ist am GRUNDE unseres Sprachspiels.“ [BGM, 330.28] Sprachspiele sind komplexe Gruppen von Regeln, denen wir „blind“ folgen, d.h. „daß die Untersuchung der Elemente des Regelfolgens uns nicht zu verstehen hilft, was es heißt, ein Sprachspiel zu spielen. Im Gegenteil, das Regelfolgen läßt sich nur durch Bezugnahme auf Sprachspiele begreifen.“ [HH90, 257]

Zeichen erhalten Bedeutung durch jegliche sprachliche und außersprachliche Praxis. Beim Lernen einer neuen Bedeutung erwirbt man nicht unbedingt die Kenntnis einer Regel, sondern lernt eine neue Technik beherrschen, ein neues Verhalten. [HH90, 233f.] Dies stellt eine Ausweitung von Freges Kontextprinzip dar (nur im Kontext des Satzes hat ein Name Bedeutung), das dieser als Argument gegen den Psychologismus verwendete. „Nur im Fluß des Lebens haben die Worte ihre Bedeutung.“ [LPP, 913][9]

Die Verwendung eines Wortes, ein Spiel und der Gebrauch des Wortes Spiel selbst sind nicht nach allen Seiten durch Regeln eingeschränkt - es findet eine Öffnung gegenüber dem Kalkülbegriff statt: „There rules were all we had, and once you left the boundaries of the rules there was only nonsense. Now meaning is part of the much larger concept of a language-game.“ [Ger96, 177] So erst können die Entwicklung von Regeln z.B. beim Schach oder „Familienähnlichkeiten“ einer großen Vielfalt von Sprachspielen untersucht werden. Vorher konnte Wittgenstein nur den Unterschied der Bedeutungen

[9] Ausgehend von dieser Bemerkung könnte man Beziehungen Wittgensteins zur Lebensphilosophie Schopenhauers, Nietzsches oder Diltheys untersuchen. [Gef98, 165]

feststellen, wenn sich die Regeln ändern [PB, 178], und er redet sogar von zwei Arten von Primzahlen nach der Entdeckung des Verteilungsgesetzes der Primzahlen [PG, 375].

3.3 Sicherheit und Kontingenz mathematischer Aussagen

Vor dem angesprochenen Hintergrund findet Wittgenstein seinen Weg zwischen Psychologismus und Objektivismus. „Die Verbindung, die keine kausale, erfahrungsmäßige, sondern eine viel strengere und härtere sein soll, ja so fest, daß das Eine irgendwie schon das Andere ist, ist immer eine Verbindung in der Grammatik.“ [BGM, 88.128] Beweise bestehen, wie gesagt, aus grammatischen, nicht empirischen Sätzen. Ihre Ergebnisse, mathematische Sätze, haben den fundamentalen Status von Regeln und können daher nicht durch die Erfahrung revidiert werden, sondern sie gehen ihr voraus, bilden einen Rahmen, innerhalb dessen Wahrheit und Falschheit, Zustimmung und Ablehnung erst Bedeutung erhalten. [Ger96, 179, 191] Der Akt des Regelfolgens selbst ist unstrittig (zumindest normalerweise kommt es darüber unter Mathematikern nicht zu Tätlichkeiten... [PU, §240]). Von daher rührt die prinzipille Sicherheit von Beweisen, auch wenn die Gemeinschaft der Mathematiker bei besonders komplexen Beweisen Jahre braucht, um jeden einzelnen Schritt zu überprüfen. Ist aber ein Fehler gefunden, so wird dies von allen sofort akzeptiert, die den Zusammenhang verstehen. „Richtig und falsch ist, was die Menschen *sagen*; und in der *Sprache* stimmen die Menschen überein. Dies ist keine Übereinstimmung der Meinungen, sondern der Lebensform.“ [PU, §241] Glücklicherweise gibt es (oft? im besten Fall?) genug Übereinstimmung, um miteinander reden oder auch streiten zu können. „Without a natural environment of a certain constancy, without a shared humanity of similar needs and reactions; unless we spoke a shared language, unless there was enough agreement, then it would be meaningless both to deny the existence of witches and to count them.“ [Ger96, 192]

Andererseits verändert sich die Mathematik grundlegend, ohne dass frühere Sätze falsch werden. Konsequenzen aus bekannten Sätzen und Verallgemeinerungen führen zu neuen Sichtweisen, neue Begriffe werden definiert, und es entstehen sogar neue mathematische Disziplinen. So gilt gleichzeitig [Ger96, 186]:
(1) „$2 + 2 = 4$“ is a necessary proposition in English.
(2) That „'$2 + 2 = 4$' is a necessary proposition in English“ is contingent.
Bewegt man sich etwa außerhalb der üblichen Addition, nämlich im Rahmen der Restklassen-Addition modulo 4, so gilt mit der gleichen Notwendigkeit „$2 + 2 = 0$“. Unsere Art der Mathematik hängt auch von allgemeinen Naturtatsachen ab wie der Leistungsfähigkeit unseres Gedächtnisses: Wenn wir nur zwei Schritte eines Beweises behalten könnten, wäre unsere Mathematik eine andere. [Ger96, 185, 188]. In [BGM, 199.74f.] stellt Wittgenstein das Gedankenexperiment an, unterschiedliche Messungen der gleichen Länge hätten unterschiedliche Resultate (z.B. die Messung eines Tisches mit mehreren Zollstöcken). Dann würden Längenangaben nicht falsch, sondern sinnlos. „If there is too much confusion, then the result would be no mathematics at all“ [Ger96, 189].

4 Zur Mengenlehre

Hier gehe ich aus von Abschnitt 137 *Zur Mengenlehre* aus dem Kapitel *Das Unendliche in der Mathematik. Extensive Auffassung* des *Big Typescript* [BT, 488-95].

[PG, 460-70] ist bis auf einige Auslassungen damit identisch. - Zunächst setzt sich Wittgenstein mit dem Dedekind'schen Schnitt auseinander:

> Ist ein Raum denkbar, der nur alle rationalen Punkte, aber nicht die irrationalen enthält? Wäre etwa diese Struktur für unseren Raum zu ungenau/grob/? ... Weil wir die irrationalen Punkte dann nur anäherungsweise erreichen könnten? Unser Netz wäre also nicht fein genug? Nein. Die Gesetze gingen uns ab, nicht die Extensionen. [BT, 488.2]

In Dedekinds Terminologie wäre ein solcher Raum unstetig, und somit scheint sich die Stelle auf dessen folgende Bemerkung zu beziehen: „Hat überhaupt der Raum eine reale Existenz, so braucht er doch nicht notwendig stetig zu sein; unzählige seiner Eigenschaften würden dieselben bleiben, wenn er auch unstetig wäre." [Ded12, 12]

Extensionen eines mathematischen Begriffs (der natürlichen Zahlen, der Punkte im Raum...) sind für Wittgenstein nur konkret gegebene mathematische Objekte. Von einer irrationalen Zahl kann jedoch nur eine endliche Entwicklung explizit angegeben werden - also eine rationale Zahl. Vielleicht könnte man die formale Prozedur, mit der eine irrationale Zahl erzeugt wird, als Extension ansehen, ähnlich wie Funktionen einerseits Zuordnungsgesetze sind, andererseits in der Funktionalanalysis als grundlegende Objekte angesehen werden, als Elemente von Mengen bzw. Vektorräumen, auf denen wiederum Operatoren gegeben sind. Dann muss jedoch der Unterschied einer solchen Konstruktion von der einer rationalen Zahl beachtet werden. „Und was entspricht dieser Konstruktion in der Arithmetik? Etwa eine Zahl, die sich doch noch zwischen die rationalen Zahlen hineinzwängt? Ein Gesetz, das nicht vom Wesen der rationalen Zahl ist." [BT, 488.4] Wittgensteins Prinzip, dass die Bedeutung eines Begriffs in seiner Verwendung (Grammatik) liegt, hilft ihm auch hier zur Klärung.[10] In der Mathematik wird die Grammatik durch explizite Regeln bestimmt: Zur Definition einer irrationalen Zahl muss das Bildungsgesetz angegeben werden, kann jedoch nicht vollständig ausgeführt werden, während eine rationale Zahl hingeschrieben werden kann, nach dem ganz anderen, endlichen Gesetz Zähler / Nenner. Die beiden Arten von Zahlen sind also voneinander unabhängig wie Schach- und Damespiel. Daher kann man sie nicht vorbehaltlos auf einer Zahlengeraden anordnen. „Die irrationalen Zahlen füllen keine Lücke aus, die die rationalen offen lassen." [BT, 488.3].

Entsprechend liegt der „Fehler in der mengentheoretischen Betrachtungsweise" darin, „Gesetze und Aufzählungen (Listen) als wesentlich Eins zu betrachten und sie aneinander zu reihen" [BT, 489.1], also die Menge der reellen Zahlen zu bilden. Von einem anderen Ausgangspunkt her argumentiert Wittgenstein folgendermaßen: „Wenn die irrationale Zahl durch die Gesamtheit ihrer Näherungswerte gegeben ist, so gäbe es bis zu j e d e m beliebigen Punkt eine Reihe, die mit der von π übereinstimmt... Auf die Frage 'wie würde uns π abgehen', müsste man antworten: π, wenn es eine Extension wäre, würde uns niemals abgehen." Dann könnte man auch nicht von einer „Gesamtheit aller irrationalen Zahlen" [BT, 497.2] reden. Sowohl in Bezug auf Entwicklungen einer irrationalen Zahl als auch auf die Menge der reellen Zahlen ist also das „wirklich Unendliche" ein verworrener Begriff. Ein weiterer Grund dafür ist der unklare Begriff der irrationalen Zahl [BT, 496.2].[11] Unter ihm werden die verschiedensten Bildungsge-

[10] In [BT, 489.3/4] bezeichnet Wittgenstein das Ordnen rationaler oder reeller Zahlen aufgrund einer solchen Analyse als Scheinbegriff, und er weist auf grundlegende Unterschiede im Mengenkalkül und im Kalkül der natürlichen Zahlen hin, die gemeinsame Ausdrucksweisen als sehr irreführend erscheinen lassen. Die erste Problematik wird in [BGM, 129.16] wieder aufgegriffen und auf S. 16 behandelt, die zweite auf S. 13.

[11] Die weitergehende Bemerkung „Der Wirrwarr in der Auffassung des 'wirklich Unendlichen' kommt von dem unklaren Begriff der irrationalen Zahl her" kann ich nicht ganz nachvollziehen. Vielleicht

setze zusammengefasst, „ohne klare Begrenzung des Begriffs“, das heißt es gibt keine endliche Menge von Regeln zur Erzeugung irrationaler Zahlen. Somit können noch nicht einmal diese angegeben, geschweige denn „alle reellen Zahlen“ aufgezählt werden. Drei schöne Beispiele für Arten irrationaler Zahlen analysiert Wittgenstein in [BT, 499-504]. Der Begriff „regellose unendliche Dezimalzahl“ dagegen hat keinerlei Aussagekraft: „Wie unterscheidet sich ein unendlich kompliziertes Gesetz vom Fehlen eines Gesetzes?“ [BT, 505.3]

Im Hintergrund stehen unterschiedliche Auffassungen des Kontinuums bzw. der Stetigkeit. C. Thiel [Thi95, 186-195] stellt Aristoteles' Standpunkt demjenigen der modernen Topologie gegenüber. In dieser wird eine Menge, die zugleich abgeschlossen und zusammenhängend ist, ein Kontinuum genannt. Ein solches ist etwa das Intervall $[0,1] \subset \mathbb{R}$. Abgeschlossen ist es, da alle Häufungspunkte (in jeder Umgebung eines solchen liegen Punkte aus dem Intervall) in $[0,1]$ enthalten sind. Zusammenhängend bedeutet: Wird das Intervall in zwei beliebige disjunkte Teilintervalle L und R zerlegt[12], dann exisitiert entweder in L ein Punkt d, der zugleich Häufungspunkt von R ist, oder in R ein Punkt d', der zugleich Häufungspunkt von L ist. Dies entspricht dem Dedekind'schen Postulat als Charakterisierung der Stetigkeit der Geraden sowie der reellen Zahlen.

Bei Dedekind, Cantor und in der Standard-Topologie und -Analysis nach ihnen werden geometrische Gebilde wie eine Gerade als Mengen arithmetisch gegebener Punkte aufgefasst. Für Aristoteles dagegen sind Punkte und Geraden / Strecken eigenständige Objekte. Nur die Endpunkte von Strecken sind als Punkte gegeben. „Ein Punkt aber kann selbst keine Grenze mehr haben, so daß Punkte einander nicht berühren und infolgedessen auch kein Kontinuum bilden können... Eine Gerade oder eine Strecke ist vielmehr insofern ein Kontinuum, als sie beliebig oft teilbar ist, wobei aber ihre Teile *und damit auch ihre Grenzen, die Punkte* immer nur potentiell, der Möglichkeit nach, 'in' einem solchen Kontinuum vorhanden sind.“ [Thi95, 189] Auch Wittgenstein sieht Strecken und Kurven nicht als Punktmengen an [S. 11], [BT, 488.5-6]. In [BT, 496.1] weist er auf den Widerspruch hin, dass die Mengenlehre z.B. für $\mathbb{R}$ das Bild einer nach allgemeinem Sprachgebrauch diskontiuierlichen Punktmenge verwendet, jedoch diesem Bild widersprechend dann Kontinuität aussagt. Der beliebigen Teilbarkeit einer Strecke bei Aristoteles entspricht der Hinweis, dass die Endpunkte rationaler Intervalle beliebig dicht liegen können [BT, 488.4].[13] Entsprechend der nicht-extensionalen Auffassung irrationaler Zahlen wird auch geometrisch durch eine Strecke der Länge $\sqrt{2}$ kein Punkt konstruiert (als Endpunkt der Diagonalen des Einheitsquadrats), der von allen Näherungen (durch Teilen von Strecken) zu unterscheiden wäre [BT, 496.3]. „Der 'Schnitt in einem irrationalen Punkt' ist ein Bild, und ein irreführendes Bild.“ [BT, 496.5]

Wittgenstein besteht - zunächst allgemein - auf einer intensionalen gegen die extensionale Auffassung von Unendlichkeit. „Alle Paradoxe des Unendlichen lösen sich wenn man einsieht daß im Bereich der unendlichen Zahlenreihe nur die intensionale Allgemeinheit Sinn hat.“ [Ms, 1.115.2] Es gibt keinen sinnvollen Begriff, zu dem eine aktual unendliche Menge von Extensionen gehören würde; auch Cantors Definition einer Menge ist dann revisionsbedürftig. Unendlichkeit kann nur intensional, in Begriffsbestimmungen auftreten, und dann muss sie potentiell aufgefasst werden:

ist sie in dem Sinn gemeint, dass der wichtigste Anstoss zu Cantors transfiniter Mengenlehre das Problem der reellen Zahlen und die Unterscheidung abzählbarer und überabzählbarer Mengen war.

[12] Es gilt also $L \cup R = I$, $L \cap R = \emptyset$ und $x < y$ für alle $x \in L$ und $y \in R$.

[13] Daher läge für Wittgenstein eine Auffassung des Kontinuums in der Tradition des Aristoteles nahe. Wie weit er sich tatsächlich damit identifiziert, habe ich nicht untersucht.

„'Unendlich ist nur die Möglichkeit' heißt: 'unendlich' ist ein Zusatz zu 'u.s.w.': Und soweit es dies ist, gehört es in eine Regel, ein Gesetz.“ [BT, 528.1.4][14] So kann Dedekind neu interpretiert werden: „Ein Schnitt ist ein P r i n z i p der Teilung in größer und kleiner.“ [BT, 496.5]

[BT, 490.1-3] entwickelt ein Beispiel für diese Sichtweise. In Bemerkung [BT, 488.6] war bereits der Schnittpunkt zweier Kurven angesprochen,[15] nun geht es um die Bedeutung des Ausdrucks „das Maximum einer Kurve“. Wittgenstein schlägt eine konstruktive Definition vor: „...so frage man sich: wie findet man es?“ Sieht man eine Kurve als wirklich unendliche Punktmenge an, so verleitet die Syntax dazu, einen formal gleichen Satz wie für eine endliche Punktmenge zu bilden, etwa: Das Maximum liegt höher als alle anderen Punkte. Dies verwirft Wittgenstein apodiktisch, in Form einer Existenzaussage: „Es gibt ein Gesetz einerseits und Punkte auf der Kurve anderseits - aber nicht 'a l l e Punkte der Kurve'.“ Noch deutlicher ist [PB, 211]: „Die Mathematik ist ganz durch die perniziöse mengentheoretische Ausdrucksweise verseucht. *Ein* Beispiel dafür ist es, daß man sagt, die Gerade bestehe aus Punkten. Die Gerade ist ein Gesetz und besteht aus gar nichts. Die Gerade als farbiger Strich im visuellen Raum kann aus kürzeren farbigen Strichen bestehen (aber natürlich nicht aus Punkten).“ Auch die Beschreibung des Maximums mittels potentieller Unendlichkeit führt nicht weiter: „'Das Maximum ist doch aber höher, als jeder beliebige andre Punkt der Kurve.' Aber die Kurve besteht ja nicht aus Punkten, sondern ist ein Gesetz, dem Punkte gehorchen.“ Wichtig ist Wittgenstein, die Sinnlosigkeit einer solchen Redeweise herauszustellen. Eine Handlung, die wir prinzipiell nicht ausführen und deren Ergebnis wir daher nicht überprüfen können (der Vergleich aller Punkte), kann nicht sinnvoll beschrieben werden.

Beispielsweise erhält man durch Einsetzen eines x-Wertes in die Funktionsgleichung $y = -x^2$ einen bestimmten Punkt der Ebene. Verbindet man viele solcher Punkte, erhält man als Kurve eine Parabel. Das Maximum ist der Punkt, der der Funktionsgleichung genügt und den größten y-Wert hat. Da ein Quadrat ≥ 0 ist, „erkennt man leicht“,[16] dass das Maximum im Punkt $(0|0)$ liegt (in anderen Fällen führt die Betrachtung der Ableitungen zum Ziel). Sicherlich sind dafür mehrere schon selbstverständlich gewordene Schlussfolgerungen - Anwendungen von Gesetzen - nötig. Unendlich viele Punkte vergleicht man natürlich nicht, einzelne höchstens, um sich das Gesetz anhand von Beispielen klar zu machen. Man weiß jedoch aufgrund der Definition: „Das Maximum der Kurve liegt höher als irgend welche Punkte der Kurve, die man etwa konstruiert“ - in dieser nuancierten Ausdrucksweise kann man von potentiell Unendlichem reden.

Dabei ist zu beachten: „Es gibt ein Gefühl: 'In der Mathematik kann es nicht Wirklichkeit und Möglichkeit geben. Alles ist auf e i n e r Stufe. Und zwar in gewissem Sinne w i r k l i c h'. - Und das ist richtig. Denn Mathematik ist ein Kalkül; und der Kalkül sagt von keinem Zeichen, daß es nur m ö g l i c h wäre, sondern er hat es nur mit den Zeichen zu tun, mit denen er w i r k l i c h operiert. (Vergleiche die Begründung der Mengenlehre mit der Annahme eines möglichen Kalküls mit unendlichen Zeichen.)“ [BT, 495.2] Diese Bemerkung wendet sich u.a. gegen L.E.J. Brouwers (1881-1966) intuitionistische Sicht des potentiell Unendlichen als einer Idealisierung der Aktivität

[14] Dies ist Teil eines bereits kritischen, einschränkenden Eigenzitats [vgl. S. 19].

[15] „Der Schnittpunkt zweier Kurven ist nicht das gemeinsame Glied zweier Klassen von Punkten, sondern der Durchschnitt zweier Gesetze.“

[16] Ähnliche Formulierungen werden in der mathematischen Literatur manchmal übertrieben häufig gebraucht und können für Nicht-Spezialisten des entsprechenden Fachgebiets Anlass zu anstrengendem Nachdenken oder Nachschlagen sein: offensichtlich gilt, bekanntlich, on reconnaît facilement, one easily checks, obviously, it's well-known that...

eines Mathematikers, der wiederholt Resultate einer Regelanwendung erzeugt. Wird dieser Prozess von außen als ein Ganzes betrachtet, unterscheidet sich diese Auffassung wenig von Cantors Idee des aktual Unendlichen. [Gef98, 180] Dagegen betont Wittgenstein, dass jeweils ein neuer Akt der Einsicht nötig ist, wenn eine Instanz einer Regel gebildet wird. „D.h. es wohnt dem Wort 'u.s.w.' keine geheime Kraft inne, durch die nun die Reihe fortgesetzt wird, ohne fortgesetzt zu werden.“ [PG, 282] Er akzeptiert nur endliche Zeichenketten als mathematische Beweise. Damit kann keine unendliche Menge auf einmal erfasst werden, und das Kontinuum (als Punktmenge) ist mit diskreten Begriffen nicht vorstellbar.

> „Die Überlegungen der Mathematiker über das Unendliche sind doch lauter endliche Überlegungen.“ [Ms, 1.104.4f][17]

„Es ist schwer, sich von der extensiven Auffassung ganz frei zu machen: So denkt man: 'Ja, aber es muß doch eine innere Beziehung zwischen $x^3 + y^3$ und z^3 bestehen, da doch (zum mindesten) die Extensionen dieser Ausdrücke, wenn ich sie nur kennte, das Resultat einer solchen Beziehung darstellen müßten'.“ [BT, 486.2] Die durch den Satz von Fermat (für den Exponenten 3) gegebene Beziehung kann nicht durch eine Beziehung „aller“ Extensionen begründet werden, denn die Rede vom Durchlaufen einer unendlichen Zahlenreihe oder vom Prüfen einer unendlichen Zahl von Sätzen ist sinnlos [BT, 482, 486.3], vgl. [PB, 232.189]. Der Beweis des Satzes stellt dagegen komplizierte allgemeine Überlegungen an, analytische Urteile[18]: „Der mathematische Satz weiß selbst, daß er wahr, oder daß er falsch ist. Wenn er von allen Zahlen handelt, so muß er auch schon alle Zahlen übersehen. Wie der Sinn, so muß auch seine Wahrheit oder Falschheit in ihm liegen.“ [BT, 484.4] Wäre - wie noch zu Wittgensteins Zeit möglich - im System der Mathematik kein Beweis für den Satz von Fermat zu erhalten, so könnte man auch keinen objektiven Zusammenhang postulieren, etwa mit der Begründung: Als beschränkter Mensch kann ich nicht alle Extensionen übersehen, aber in der - von der Sprache unabhängigen! - Wirklichkeit gilt der Satz, oder er gilt nicht. Dies widerspricht Wittgensteins grundlegender „These der Sprache als universelles Medium“ [HH90, 14ff., 46ff.], vgl. [PB, 146.124], und es zeigt sich deren Zusammenhang mit seiner Ablehnung des aktual Unendlichen.

Es gibt also auch Eigenschaften einer Zahl, die „nicht vorauszusehen sind. Man sieht sie erst, wenn man zu ihr kommt.“ [BT, 486.1] Dazu zählt z.B., ob eine Zahl eine Primzahl ist, oder wo in der Entwicklung von π eine Gruppe 777 vorkommt. [BT, 499.1] Man trifft nicht ein vorgegebenes Zahl-Individuum an, sondern das Zählen „erzeugt und ist die Zahl“ [BT, 486.1]. Dieses Offenbarsein des Sinns [BT, 495.1] sowie die Ablehnung einer verborgenen Wirklichkeit hinter deren sprachlicher Formulierung schwingen wohl bei folgender Bemerkung mit und machen ihre Nichttrivialiatät aus[19]: „So seltsam es

[17] Für David Hilbert (1862-1943) ist dies eine Selbstverständlichkeit [Hil26, 162], und auch Zermelos unendliche Logik muss in diesem Sinn verstanden werden: “He went on to say that 'our system of signs is always an incomplete device, shifting from case to case. It reflects our finite understanding of the infinite, which we cannot immediately and intuitively 'survey' or comprehend, though at least we can approach mastery step by step'... He went on to propose an infinitary logic, with conjunctions and disjunctions of any set of propositions and well-founded infinitary proofs“ [Lav98, 140]

[18] Allerdings lässt sich Wittgensteins Philosophie nicht auf Kants Alternative synthetischer und analytischer Urteile festlegen. So meinen M. und J. Hintikka zwar grundsätzlich: „Nach seiner Auffassung gibt es kein synthetisches Apriori, kein 'Mittelding zwischen Wissenschaft und Logik'.“ [HH90, 204] Dennoch stellen sie gewisse Parallelen zu Husserls Auffassung des synthetischen Apriori fest. - Hier seien nur noch einige Stellen genannt, in denen Wittgenstein ausdrücklich auf diese Frage eingeht: [Ms, 1.155.1.], [PB, 126-129], [PB, 156.151.8], [PG, 403f.]. In [BGM, 246.43] schreibt Wittgenstein (in welchem Sinn?) vom „synthetischen Charakter der mathematischen Sätze“ und nennt die Verteilung der Primzahlen als „Beispiel für das, was man synthetisch *a priori* nennen könnte“.

[19] Außerdem drückt sie einen Gegensatz zu Brouwers Sicht des potential Unendlichen aus [S. 11].

klingt, die Weiterentwicklung einer irrationalen Zahl ist eine Weiterentwicklung der Mathematik." [BGM, 267]

In [BT, 491.1] kommt Wittgenstein auf Cantors Theorie der transfiniten Zahlen zu sprechen. „Man gibt nämlich zu, daß die unendlichen Zahlen eine andere Art Zahlen sind, als die endlichen, aber man mißversteht nun, worin hier der Unterschied verschiedener Arten besteht. Daß es sich nämlich hier nicht um die Unterscheidung von Gegenständen nach ihren Eigenschaften handelt, wie wenn man rote Äpfel von gelben unterscheidet, sondern um verschiedene logische Formen." Es geht also um Unterschiede nicht in der Schulgrammatik, sondern der oft dadurch verhüllten „Struktur, so wie sie von der formalen Logik mit dem Ziel paraphrasiert wird, diejenigen Züge des Satzes zu enthüllen, die für die Gültigkeit von Argumenten, in denen er auftritt, wichtig sind." [Glo00, Art. Logische Form][20] Die extensionale Auffassung der Mathematik begeht einen entscheidenden Kategorienfehler[21], wenn sie „unendlich" wie eine natürliche Zahl behandelt. „'Unendlich' ist nämlich nicht das letzte Glied oder Element in der Reihe der natürlichen Zahlen, sondern mit dem Wort 'unendlich' drückt man eine Eigenschaft der Reihe insgesamt aus" [Kie97, 147]. Daher haben auch die Worte „mehr" und „größer" verschiedene Bedeutungen; so kann man nicht fragen: „Um wieviel ist ∞ größer als 3?" Es ist nicht nötig, das Bild des Unendlichen als einer ungeheuren (größer als jede natürliche Zahl), wirklich gegebenen Größe heraufzubeschwören. [BGM, 142.59]

Cantor hatte Kardinalzahlen über die Ähnlichkeit von Mengen definiert, also 1:1-Zuordnungen ihrer Elemente. „Das, was man im Fall einer endlichen Klasse 'Zuordnung aller ihrer Glieder mit andern' nennt, ist etwas ganz anderes, als das, was man z.B. eine Zuordnung aller Kardinalzahlen mit allen Rationalzahlen nennt." [BT, 491.1] In diesem Fall heißt es nichts, alle Elemente zuzuordnen, und so kann nicht einmal der Versuch gemacht werden. Ein neuer, ganz anderer Sinn kann dieser Zuordnung nur durch das 1. Diagonalverfahren gegeben werden. In [BGM, 136.38] gesteht Wittgenstein der gemeinsamen Bezeichnung ein stärkeres Recht zu, folgert sogar aus der Analogie, dass die Grammatik von „endlos" oder $\aleph_0$ Ähnlichkeit mit der eines Zahlworts hat. Dieses gibt jedoch die Anzahl der *Glieder* einer endlosen Reihe an. Von einer Anzahl des Begriffs „endlose Folge" selbst zu reden - d.h. etwa den Ausdruck zu bilden „Klasse aller Klassen, die mit der Klasse 'endlose Folge' zahlengleich sind" -, hat jedoch genauso viel Sinn wie Engel zu zählen, die auf einer Nadelspitze Platz haben - es gibt keine Verwendung dafür.

Im Zuge der Überarbeitung seiner Manuskripte aus den Jahren 1929-30 überwindet Wittgenstein eine dogmatische Haltung, die nur intensionale Unendlichkeit zulässt. „Wenn ich sage, 'unendlich' sei eine Charakteristik einer Regel, so beziehe ich mich auf *eine* bestimmte Bedeutung des Worts." [PB, 304] Eine extensionale Auffassung des Unendlichen bleibt nach wie vor unsinnig, jedoch steht die Verwendung von „unendlich" außerhalb der Mathematik oft jenseits dieser Alternative [Kie97, 158f.], [S. 19]. Innerhalb der Mathematik verwirft Wittgenstein nicht Redewendungen, die eine extensionale Auffassung suggerieren, sondern will ihre Grammatik klären [BT, 520.2].

[20] Auf die Verbindung dieses Begriffs mit der Bildtheorie des *Tractatus* soll hier nicht eingegangen werden. An dieser Stelle wird er natürlich unabhängig davon verwendet, gleichbedeutend mit einem Hinweis auf die unterschiedlichen Grammatiken des Wortes „Zahl". [Hac97, 157]

[21] Als Beispiel folgendes Zitat: "...infinitary objects are extrapolated ('idealized') versions or counterparts of the finite ones... Once one accepts the extrapolation view, that state of affairs does not seem unsatisfactory, since one can describe the nature of the idealization so precisely. The state of affairs is not much worse than that of, say, our knowledge of what it is like in the core of a neutron star. Without extrapolation, however, understanding the nature of infinite sets has been one of the main mysteries of the philosophy of mathematics." [Lav98, 316f.]

„Es würde freilich nichts schaden, ja sehr interessant sein, die Analogie zwischen dem Maximum einer Kurve und dem Maximum (in anderem Sinne) einer Klasse von Punkten zu sehen, solange uns die Analogie nicht das Vorurteil eingibt, es liege im Grunde beidemal dasselbe vor.“ [BT, 490.1] Und der Begriff „Gesamtheit von Punkten“ könnte doch im Zusammenhang der konstruktiven Definition des Maximums Bedeutung erhalten [BT, 490.3], kritischer in [BT, 488.6].

Am Ende des Abschnitts *„Zur Mengenlehre“* bringt Wittgenstein zusammenfassende Bemerkungen zu seiner Kritik.

> Die Mengenlehre sucht das Unendliche auf eine allgemeinere Art zu fassen, als es die Untersuchung der Gesetze der reellen Zahlen kann. Sie sagt, dass das wirklich Unendliche mit dem mathematischen Symbolismus überhaupt nicht zu fassen ist und daß es also nur beschrieben und nicht dargestellt werden kann. Die Beschreibung würde es etwa so erfassen, wie man eine Menge von Dingen, die man nicht alle in der Hand halten kann, in einer Kiste verpackt trägt. Sie sind dann unsichtbar, und doch wissen wir, daß wir sie tragen (gleichsam indirekt). Man könnte von dieser Theorie sagen, sie kaufe die Katze im Sack. Soll sich's das Unendliche in seiner Kiste einrichten, wie es will. [BT, 494.1.1]

Hier wird die Nichtexistenz eines Kalküls für alle reellen Zahlen wieder als Hauptproblem der Theorie unendlicher Mengen angesehen. Ähnlich wie im Zusammenhang mit dem Satz von Fermat angesprochen [S. 12], kritisiert Wittgenstein eine „verdächtige Allgemeinheit“ [BT, 493.2], s.a. [BT, 489.5], die „Atmosphäre von Gedankennebeln, die den bloßen Kalkül umgibt.“ [BT, 495.3][22] Kein Mathematiker kann erklären, was er unter dem Begriff des aktual Unendlichen genau versteht. „So verpackte Begriffe dürfen wir allerdings verwenden, aber unsere Zeichen haben ihre Bedeutung immer über Definitionen, die eben die Begriffe /Strukturen/ so verhüllt haben; und gehen wir diesen Definitionen nach, so werden die Strukturen wieder enthüllt.“ [BT, 494.1.2]

Auch „abgehobene“ Teile des Mengenkalküls wie die Arithmetik und Sätze über unendliche Kardinalzahlen sind damit nicht als etwas Falsches erwiesen (höchstens als etwas Uninteressantes). Problematisch ist jedoch die Interpretation: Das wirklich Unendliche existiert, ist menschlicher Erkenntnis aber nicht zugänglich. Daher musste ein endlicher Symbolismus gefunden werden, der es handhabbar macht, ähnlich wie dies in Bezug auf das unendlich Kleine durch die Betrachtung von Grenzwerten endlicher Größen geschah.[23] Diese scheinbare Beschreibung eines „der Mengenlehre zugrunde liegenden, fiktiven Symbolismus“ [BT, 495.3], dieser Bezug des endlichen Symbolismus auf ein allgemein verstandenes Unendliches ist Unsinn.[24]

[22][BT, 493.3] bringt diesen Gedanken in Verbindung mit der Kritik an metaphysischen erkenntnistheoretischen Aussagen.

[23]Vgl. [Hil26]. Einerseits bezieht er sich zwar auf das aktual Unendliche [Hil26, 167], will jedoch mit seiner Theorie idealer Aussagen „das Unendliche im Sinne der unendlichen Gesamtheit, wo wir es jetzt noch in unseren Schlußweisen vorfinden, als etwas bloß Scheinbares erkennen.“ [Hil26, 162]

[24]Beispielsweise heißt es zum Induktionsbeweis in [MS, 5.151.1.1]: „Der Witz unserer Darstellung ist ja daß der Begriff 'alle Zahlen' nur durch eine Struktur der Art $[1, \xi, \xi + 1]$ gegeben ist. Die Allgemeinheit ist durch diese Struktur im Symbolismus dargestellt und kann nicht durch ein $(x) \cdot fx$ beschrieben werden.“ Ein im Sinn einer Totalität aufgefasster allgemeiner Term fx ist fiktiv. „Ein Induktionsbeweis 'beweist' also nicht, daß etwas für unendlich viele oder 'alle' Zahlen gilt, weil er überhaupt kein spezieller Beweis ist, sondern er zeigt nur auf, daß man für jede beliebige vorgelegte Zahl einen solchen Beweis konstruieren kann.“ [Kie97, 176] - Bei einem fiktiven Symbolismus kann man auch denken an die „Begründung der Mengenlehre mit der Annahme eines möglichen Kalküls mit unendlichen Zeichen“ [BT, 495.2], vgl. Fußnote 17 und [S. 11].

Wittgenstein will also den Begriff des Unendlichen nicht aus der Mathematik streichen, sondern seinen Sinn duch genaue Analyse der Verwendungen klären. F. Waismann, einer der Gründungsmitglieder des Wiener Kreises, der dort Wittgensteins Gedanken bekannt machte und sich (auch) in seiner Philosophie der Mathematik auf Wittgenstein bezieht,[25] formuliert so (in Bezug auf die Grenzwertbildung in der Analysis): „Wenn in einer mathematischen Aussage der Begriff 'unendlich' vorkommt (im Sinne des Potential-Unendlichen), so läßt sich derselbe Sachverhalt auch durch ein System von Aussagen beschreiben, in die nur Beziehungen zwischen endlichen Zahlen eingehen. Man könnte somit den Ausdruck 'unendlich' ganz aus dem Wortschatz der Mathematik verbannen, ohne damit das Geringste vom Inhalt ihrer Sätze zu opfern.“ Jedoch sei es „vorteilhaft, das Unendliche als eine façon de parler beizubehalten. Dieser Begriff ist also ein Symbol, dessen wir uns bedienen, um gewisse Beziehungen in kurzer und übersichtlicher Weise zu beschreiben.“ [Wai96, 90] Und Wittgenstein:

> 'Soll man das Wort ›unendlich‹ in der Mathematik vermeiden?' Ja; dort, wo es dem Kalkül eine Bedeutung zu verleihen scheint; statt sie erst von ihm zu erhalten.“ [BGM, 141.58]

5 Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik

Im Abschnitt [BGM, 125-42] behandelt Wittgenstein ausführlich Cantors Diagonalverfahren. Dabei macht er zunächst wieder seine intensionale Auffassung von irrationalen Zahlen deutlich: Er spricht von einer „Diagonalregel“, Zahlen sukzessive herzustellen, die von jeder einer vorgegeben Zahlenreihe - z.B. den Wurzeln - verschieden sind [BGM, 126.3]. In [Ms, 2.268.1] heißt es: „Wendet man meine Betrachtung auf das Cantorsche Diagonalverfahren an, so ergibt sich: Eine unendliche Menge von Dezimalbrüchen kann nur ein Gesetz bedeuten nach dem Gesetze gebildet werden und das heißt eigentlich eine Funktion von zwei Veränderlichen. $F(x, y)$ ist die allgemeine Form dieser Dezimalbrüche.“ Expliziter lässt sich eine Irrationalzahl nicht angeben, und es ist auch unnötig, denn man weiß, wie man sie in ihrer „mathematischen Umgebung“ verwenden, also Rechenoperationen ausführen kann. In diesem Sinn sind die Methode, eine (irrationale) Zahl zu kalkulieren, und ihr Resultat eins. Die Aufforderung „Zeige mir eine Zahl“ geht über in die Frage "Wozu kann man diese Zahl *brauchen*?". Wieder zeigt sich die Sichtweise von Mathematik als Sprache, deren Begriffe einander gegenseitig erklären - Zusammenhang, Struktur ist entscheidend.

Vergleicht man eine Reihe reeller Zahlen mit ihrer Diagonalzahl, so vergleicht man Methoden des Kalkulierens. Resultate der Methoden zu vergleichen - also Extensionen - hat dagegen keinen klaren Sinn, denn es gibt nicht *das* Resultat, sondern eher eine unendliche Reihe von Resultaten. [BGM, 126.4-5] Zwar wird das Resultat einer Kalkulation mit einem Wort wie Wurzel oder Diagonalzahl bezeichnet, aber: „Der Wortausdruck wirft nur einen matten allgemeinen Schein auf die Rechnung; die Rechnung aber ein grelles Licht auf den Wortausdruck.“ [BGM, 127.7]. Kann man natürliche Zahlen auf ihre Gleichheit prüfen, so hat der Vergleich unendlicher Reihen von Resultaten noch keinen Sinn. Es muss erst eine neue Methode definiert werden, und im Fall des Vergleichs mit einer unendlichen Reihe von unendlichen Dual- oder Dezimalentwicklungen ist *eine* Möglichkeit das zweite Diagonalverfahren: „'Ich will dich eine Methode lehren, wie du in einer Entwicklung allen diesen Entwicklungen nach der Reihe *ausweichen* kannst.'“ [BGM, 127.8] Im folgenden Abschnitt nennt Wittgenstein eine andere mögliche Methode: „Die Diagonalzahl wird durch Addition oder

[25] vgl. [Hac97, 82, 84, 103, aber auch 582].

Subtraktion von 1 erzeugt, aber ob zu addieren oder zu subtrahieren ist, erfährt man erst, wenn man die ursprüngliche Reihe um mehrere Stellen fortgesetzt hat." [BGM, 127.9] Hier kann schon leichter eine Diskussion ausbrechen, ob die Diagonalreihe von jeder der ursprünglichen Reihen verschieden ist. Durch eine objektivistische Sicht auf Zahlen ist „jede Gelegenheit gegeben, die Bedeutungen zu drehen und zu wenden." [BGM, 126.4] Wittgenstein akzeptiert dagegen, dass man sich nicht außerhalb des Zusammenhangs von Mathematik, Sprache und menschlicher Praxis stellen und sie etwa mit einer „mathematischen Wirklichkeit" vergleichen kann. Mathematische Axiome und Definitionen sind kontingent, und entsprechende Sprachspiele können nicht weiter begründet werden (wohl aber kann man ihren Nutzen erklären). „Das Gefährliche, Täuschende der Fassung: 'Man kann die reellen Zahlen nicht in eine Reihe ordnen' oder gar 'Die Menge ... ist nicht abzählbar' liegt darin, daß sie das, was eine Begriffsbestimmung, Begriffsbildung ist, als eine Naturtatsache erscheinen lassen." [BGM, 131.19] Eher könnte man sagen: "Den Zahlbegriff X nenne ich unabzählbar, wenn festgesetzt ist, daß, welche der unter ihn fallenden Zahlen immer du in eine Reihe bringst, die Diagonalzahl dieser Reihe auch unter ihn fallen solle." [BGM, 128.10][26]

Um die Bedeutung dieses Begriffs weiter zu klären, fragt Wittgenstein nun nach seiner Verwendung, bzw. nach dem Nutzen des 2. Diagonalverfahrens [BGM, 129.12]. Seine erste Antwort ist sehr ironisch und vernichtend: Der einzige Zweck dieses Höhenflugs im Reich des Unendlichen scheint zu sein, einen Verrückten zu beruhigen, der „tagaus tagein versuchte 'alle Irrationalzahlen in eine Reihe zu bringen'" - und das nicht einmal mit großen Erfolgsaussichten [BGM, 129.13].

Eine positivere Antwort findet Wittgenstein, indem er zunächst seine Sinnkritik radikalisiert und schon die Frage nach der Abzählbarkeit der reellen Zahlen einbezieht. „Der Fehler beginnt damit, daß man sagt, die Kardinalzahlen ließen sich in eine Reihe ordnen." [BGM, 129.16] Diese Aussage direkt sieht Wittgenstein wohl nicht als Fehler an, sondern die darauf folgende Illusion, „in eine Reihe ordnen" habe unabhängig von der Art von Zahlen einen Sinn. Dieser Begriff ist von Fällen wie den natürlichen, geraden oder Fibonacci-Zahlen abstrahiert, und die Analogie kann mittels Cantors erstem Diagonalverfahren auf die rationalen Zahlen ausgeweitet werden. Nun gibt es ja Reihen spezieller irrationaler Zahlen, und man könnte fragen: Lässt sich eine davon so fortsetzen, dass sie alle reellen Zahlen (formal als unendliche Dezimalentwicklung definiert) enthält, oder eine neue entsprechende Reihe finden? Dies ist jedoch zu vage; da es keinen konstruktiven Begriff einer reellen Zahl gibt (s. „Arten irrationaler Zahlen" [BT, 139: 499.1-504.2], [S. 9]), lässt sich kein allgemeines Verfahren angeben, mit dem man versuchen könnte, diese in eine Reihe zu ordnen. Um aber die Aussage: „Die reellen Zahlen lassen sich in eine Reihe ordnen" verneinen zu können, muss man sie verstehen.[27] Der Sinn muss offenkundig und klar sein [S. 12], d.h. das prinzipielle Vorgehen, einen Beweis zu suchen, muss aus der Formulierung des Satzes erschlossen werden können [S. 6].[28] - Trotzdem dient das Diagonalverfahren einem Zweck:

[26]Wittgenstein vermeidet den Begriff der Überabzählbarkeit, denn verschiedene Arten unendlicher Mengen lassen sich nicht auf die gleiche Art wie natürliche Zahlen nach der Größe vergleichen [S. 13]. - Eine noch „bescheidenere" Formulierung des Sinns des Diagonalverfahrens steht in [BGM, 131.20]: „Wenn man etwas eine Reihe reeller Zahlen nennt, so heißt die Entwicklung des Diagonalverfahrens auch eine 'reelle Zahl', und zwar sagt man, sie sei von allen Gliedern der Reihe verschieden."

[27]Das gleiche Argumentationsmuster verwendet [BT, 492.1-2] in Bezug auf den Satz „Es gibt keine letzte Kardinalzahl". Es lässt sich in vielen Zusammenhängen anwenden: Sieht man etwa positiv formulierte metaphysische Sätze als sinnlos an, so muss man dies auch von Aussagen der negativen Theologie sagen.

[28]Für die rationalen Zahlen ist z.B. - im Gegensatz zu den reellen - ein einziges Erzeugungsgesetz gegeben. Damit ist Aufgabe des Beweises der Abzählbarkeit, eine Reihenfolge des Generierens ratio-

> Ich weiß - wie gesagt - nicht, was es ist, was hier *nicht geht*. Wohl aber sehe ich: Du willst einen Unterschied zeigen in der Verwendung von 'Wurzel', 'algebraischer Zahl'[29], etc. einerseits und 'reelle Zahl' andererseits.

Von einem wesentlichen Baustein zum Vergleich zweier aktual unendlicher Mengen wird so das Diagonalverfahren zum Nachweis der Sinnlosigkeit des Begriffs „Reihe aller reellen Zahlen". Sein intensionaler Charakter als Konstruktionsvorschrift wird betont; diese macht Eigenschaften bestimmter Arten reeller Zahlen und im Kontrast dazu des Begriffs „reelle Zahl" selbst deutlich, zielt jedoch nicht auf den Vergleich von Mengen von Extensionen. Der Abschnitt [BGM, 129.16] endet mit einem etwas paradoxen Beispiel.[30] Um in Analogie die Abhängigkeit der Definition von Unabzählbarkeit vom Zahlbegriff zu betonen, nimmt Wittgenstein an, man würde jede Reihe von Büchern selbst ein Buch nennen. Dann hätte es keinen Sinn, von der Reihe aller Bücher zu reden, denn sie würde sich selbst nicht umfassen. Entsprechend: Bildet man die Diagonalzahl einer vorgegebenen Reihe von reellen Zahlen und ist diese laut Definition ebenfalls eine reelle Zahl, so ist sie von jeder Zahl der Reihe verschieden, und es hat keinen Sinn, von der Reihe aller reellen Zahlen zu reden.

Insbesondere zeigt das Diagonalverfahren - in einem Vergleich zweier Sprachspiele - die Artverschiedenheit der Begriffe Kardinalzahl und reelle Zahl. In der üblichen Sichtweise drückt es dagegen Analogien aus, die sich als irreführend erweisen: Man geht davon aus, dass sich die Methode des Ordnens in eine Reihe auf beide Arten von Zahlen anwenden lässt, und sich die Zahl der Gegenstände (Mächtigkeit beider Mengen) vergleichen lässt. Nur wegen deren unterschiedlicher Größe führte das Ordnen nicht zum Ziel. Ein Größenvergleich hat jedoch einen völlig anderen Sinn als zwischen natürlichen Zahlen, erhält ihn höchstens durch das Diagonalverfahren. [BGM, 132.22]

Eine etwas andere (vorläufigere?) Sichtweise scheint [BGM, 133.28] auszudrücken. Hier wird die Frage nach dem Ordnen aller reellen Zahlen akzeptiert; sie muss jedoch im beschriebenen Sinn interpretiert werden: „Warum sollen wir sagen: Die Irrationalzahlen können nicht geordnet werden? - Wir haben eine Methode, jede Ordnung zu stören." Verblüffend zeigt sich Wittgensteins Altersweisheit des „tout comprendre c'est tout pardonner" an folgender Stelle: „Cantor zeigt, wenn wir ein System von Extensionen haben, daß es dann Sinn hat, von einer Extension zu reden, die von ihnen allen verschieden ist. - Aber damit ist die Grammatik des Wortes 'Extension' noch nicht bestimmt." [BGM, 134.30] Extensionen können die Bücher im erwähnten Beispiel sein oder neue mathematische Gegenstände, auf die sich das Diagonalverfahren ausweiten lässt. Es ist sogar eingeschlossen, von irrationalen Zahlen als Extensionen

naler Zahlen zu finden, die potentiell jeden Bruch einschließt. Davon handeln [BGM, 137.40-141.58]. Analog zum Ordnen nach der Reihe für reelle Zahlen hat es für Brüche keinen Sinn, sie der Größe nach ordnen zu wollen: „Eine neue Rechentechnik soll uns ja eben ein *neues* Bild liefern eine *neue Ausdrucksweise*; und wir können nichts Absurderes tun, als dieses neue Schema, diese neue Art von Gerüst, vermittels der alten Ausdrücke beschreiben zu wollen." [BGM, 138.46] Als Vergleich von Sprachspielen macht es jedoch Sinn zu sagen: „Es gibt zu einem Bruch nicht einen nächst größeren Bruch, aber zu einer Kardinalzahl eine nächst größere." [BGM, 138.47]

[29] Also einer reellen Zahl, die Lösung einer algebraischen Gleichung ist (d.h. einer polynomialen Gleichung der Form $a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 = 0$ mit $a_i \in \mathbb{N}$). Cantor hatte 1879 in *Über eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen* [Can32, 115-118] die Abzählbarkeit der Menge der algebraischen Zahlen bewiesen.

[30] Es ist sicher eine Anspielung auf die Russell'sche Antinomie der Menge aller Mengen. Überträgt man die Argumentation, so hat dieser Begriff keine Bedeutung, nicht unbedingt ist „Menge" ein insgesamt widersprüchliches Konzept. Der Widerspruch entsteht an einer Stelle, an der er für Rechnungen belanglos ist, ist sozusagen eine Kopfgeburt [vgl. BGM, 254.55-256.60, 370ff.]. „Der Widerspruch könnte als Wink der Götter aufgefasst werden, daß ich handeln soll und *nicht* überlegen." [BGM, 254.56]

zu reden; die Bedeutung muss dann im vorhinein klargestellt werden, etwa im Sinn einer „intensionalen Extensionalität"...[31]

In verschiedenen Bemerkungen greift Wittgenstein die Frage nach dem Nutzen des Diagonalverfahrens wieder auf. Rein als Kalkül genießt es das „Ansehen" dieses Grundbegriffs Wittgenstein'scher Philosophie: Auf endliche Mengen eingeschränkt, könnte damit schon ein Schulkind eine Dezimalzahl anschreiben, die von vielen anderen verschieden ist. [BGM, 131.18] Und es beweist die mathematische Existenz verschiedener transfiniter Zahlen, im Sinn eines Unterschieds des Kalküls abzählbarer und nicht-abzählbarer Mengen. Dieser ist fundamental für die Topologie und spielt daher in den Sätzen und Beweisen unterschiedlichster Disziplinen (z.B. Analysis, Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie) eine wesentliche Rolle. Diese mathematische Funktion greift Wittgenstein nicht an; er kritisiert die philosophische Interpretation des Diagonalverfahrens, Cantors „Prosa" der aktualen Unendlichkeit [Gef98, 243-46]: „ *'Diese Überlegungen können uns dahin führen, zu sagen, daß* $2^{\aleph_0} > \aleph_0$ *'*[32] ... In welcher Praxis ist dieser Satz *verankert*? Er ist vorläufig ein Stück mathematischer Architektur, die in der Luft hängt, so aussieht als wäre es, sagen wir, ein Architrav, aber von nichts getragen wird und nichts trägt." [BGM, 135.35] Cantor beachtet den kategorialen Unterschied endlicher und unendlicher Mengen nicht [BT, 491.1.2.] und versteht auch letztere im Sinn von Totalitäten, bei denen ein Größenvergleich als Vergleich der Anzahl der Extensionen Sinn macht. Die Theorie transfiniter Zahlen, insofern sie über das Diagonalverfahren hinausgeht, ist durch diese philosophische Haltung motiviert - als mathematische Theorie ist sie überflüssig, findet keine Verwendung für Rechnungen in anderen Gebieten. Immerhin ist Wittgenstein vorsichtig: „Eine solche ist nicht: noch zu entdecken, sondern: erst zu *erfinden*." [BGM, 136.38]

Insgesamt jedoch lehnt er die unendliche Mengenlehre ab.

> Ich will sagen: Es ist der Mathematik wesentlich, daß ihre Zeichen auch im *Zivil* gebraucht werden.
> Es ist der Gebrauch außerhalb der Mathematik, also die *Bedeutung* der Zeichen, was das Zeichenspiel zur Mathematik macht. [BGM 257.2]

Nach diesem Kriterium schneidet die Mengenlehre schlecht ab. Selbst wenn man - wie viele reine Mathematiker - unter Anwendungen meist nur innermathematische versteht, sind diese „gänzlich phantastisch" [BGM, 259.5]. Wittgenstein macht das Gedankenspiel, „die Mengenlehre wäre als eine Art Parodie auf die Mathematik von einem Satiriker erfunden worden" [BGM, 264.7]. Ob dies nun Mathematik wäre, lässt er hier offen. Wesentlich ist jedoch die Verwendung der Rechnungen, die klugen oder

[31] In Bezug auf Funktionen wurde schon angedeutet [S. 9], dass es in der Mathematik weit verbreitet ist, Regeln in einem neuen Zusammenhang als Objekte aufzufassen. Die Kategorientheorie hat dies zu ihrem Prinzip gemacht - sie beschreibt allgemeine Eigenschaften von Objekten und Abbildungen („Funktoren") zwischen ihnen. Objekte einer Kategorie können etwa Moduln sein, die in der Darstellungstheorie als Abbildungen zwischen Gruppen und Transformationen von Vektorräumen aufgefasst werden, oder so komplexe Konstruktionsvorschriften wie die Kettenkomplexe der Homologischen Algebra.

[32] D.h. die Mächtigkeit der Potenzmenge (= Menge aller Teilmengen) der natürlichen Zahlen ist größer als die Mächtigkeit der Menge der natürlichen Zahlen selbst. Einen Beweis mit Hilfe einer Verallgemeinerung des 2. Diagonalverfahrens gibt Cantor schon bei dessen erster Veröffentlichung [Can90], [Can32, 279f.]. Dort wird für binäre Funktionen auf dem reellen Einheitsintervall $L := [0, 1]$ - also die Menge $M := \{f : L \to \{0, 1\}\}$ - gezeigt, dass card $M >$ card L ist. M entspricht (im Sinn einer bijektiven Zuordnung) der Potenzmenge von L, denn $f(x) = 1$ kann interpretiert werden als Zugehörigkeit einer Zahl x zu der durch f bestimmten Teilmenge von L. Analog kann die Aussage für $\mathbb{N}$ statt L bewiesen werden.

abstrusen Vorstellungen, die sich jemand dazu macht, spielen keine Rolle.[33]

Nachdem in [BGM, 137.40-141.58] das Ordnen und Abzählen rationaler Zahlen behandelt wurde [Fußnote 28], sprechen die letzten 4 Bemerkungen noch zwei ergänzende Themen an.

Man kann fragen: „welches ist denn die alltägliche Verwendung des Wortes 'unendlich', die ihm seine Bedeutung für uns gibt, und was ist nun seine Verbindung mit diesen mathematischen Kalkülen?“ [BGM, 142.60] Dies hatte Wittgenstein etwa in den beiden kurzen Abhandlungen UNENDLICH LANG und UNENDLICHE MÖGLICHKEIT getan [BT, Appendix 2], vgl. [Kie97, S. 158-74]. Im Alltag wird „unendlich“ häufig im uneigentlichen Sinn, synonym mit „sehr groß“ verwendet [BT, 520.3.2], mathematisch führt das Bild des Unendlichen als einer ungeheuren (Zahlen-)Größe jedoch in die Irre [BGM, 142.59], [S. 13]. Innerhalb der Mathematik ist nur intensionale, nicht extensionale Unendlichkeit sinnvoll. Außerhalb der Mathematik steht die Verwendung des Begriffs „Unendlichkeit“ oft jenseits dieser Alternative, und sie muss im Einzelfall geklärt werden: „Sehen wir einen kontinuierlichen Farbübergang, eine kontinuierliche Bewegung, dann sehen wir k e i n e Teile, k e i n e Sprünge (nicht 'unendlich viele'; außer, ich g e b e diesem Ausdruck jetzt diese Bedeutung).“ [BT, 519.2] Weiter korrigiert Wittgenstein seine anfangs nur intensionale Interpretation des Beispiels einer endlosen Baumreihe und diskutiert die Frage, was darunter zu verstehen ist, welches Kriterium es in der Erfahrung für eine solche Bezeichnung gibt [BT, 520.3]. Zunächst ist die Baumreihe eine solche, an der wir die Erfahrung des Aufhörens nie machen [BT, 521.1]. Welche Grammatik hat jedoch ein „nie“-Satz in einem solchen Fall? - Er kann falsifiziert, nicht aber verifiziert werden. Als physikalisch realistischeres Beispiel nennt Wittgenstein das Trägheitsgesetz: Bewegt sich ein Körper unbeeinflusst mit konstanter Geschwindigkeit in einer Geraden, so kann man sagen, die Bewegung ende nie.

Unendlichkeit muss nicht nur ein „Prädikat der Möglichkeit“ [BT, 529.0.2] sein. Vielleicht ist es aber bezeichnend, dass Wittgensteins erstes Beispiel in diesem Zusammenhang der Märchenwelt entstammt: „Denken wir uns, die Fee im Märchen sagte: 'Du wirst so viel Goldstücke erhalten, als Du Dir wünschst, aber Du darfst nur einmal wünschen'.“ Nun kann man sich zwar nicht unendlich viele Goldstücke wünschen, aber: „Kann ich nun nicht sagen: die Freiheit, die mir die Fee gelassen hat, war unendlich? Und ist damit nicht eine Wirklichkeit beschrieben?“ [BT, 528.1.6] Und im hier untersuchten Text formuliert Wittgenstein:

> Von einer *Erlaubnis* sagen wir, sie habe kein Ende. [BGM, 133.26]

So kann man sagen, „die Erlaubnis Sprachspiele mit Kardinalzahlen zu spielen habe kein Ende“ [BGM, 133.27]. Es handelt sich um einen grammatischen Satz; er drückt also eine Regel der Sprachverwendung aus. Und es gibt Spielregeln, die keine Begrenzung des Spielfelds vorschreiben [BGM, 138.45]. Hier besteht eine Verbindung von alltäglichem und mathematischem Gebrauch des Wortes „unendlich“: „Der Möglichkeit entspricht immer eine Erlaubnis in den grammatischen Spielregeln. Denn, was man unendliche Möglichkeit nennt, entspricht etwas, was man eine unendliche Erlaubnis nennen könnte. Und das ist natürlich nicht die Erlaubnis, etwas Unendliches

[33] Z.B. „die Mathematiker haben ein seltsames Wesen, die $\sqrt{-1}$ entdeckt“ [BGM, 261], oder noch farbiger: „Denk dir das Rechnen mit der $\sqrt{-1}$ wäre von einem Narren erfunden worden, der, bloß vom Paradoxen der Idee angezogen, die Rechnung als eine Art Gottes- oder Tempeldienst des Absurden treibt. Er bildet sich ein, das Unmögliche aufzuschreiben und mit ihm zu operieren.“ Und weiter mit einem Seitenhieb auf die Platonisten: „Mit anderen Worten: Wer an die mathematischen *Gegenstände* glaubt, und ihre seltsamen Eigenschaften, - kann der nicht doch Mathematik betreiben? Oder: - treibt der nicht auch Mathematik?“ [BGM, 262]

zu tun.“ [BT, 529.4] Das Reden von Unendlichkeit soll also nicht dazu dienen, der Dinge habhaft zu werden, die jenseits jeder Erkenntnis liegen, sondern drückt in bestimmten Zusammenhängen grenzenlose Freiheit des Denkens und Handelns aus.

„Finitismus und Behaviourismus sind ganz ähnliche Richtungen. Beide sagen: hier ist doch nur... Beide leugnen die Existenz von etwas, beide zu dem Zweck, um aus einer Verwirrung zu entkommen“ [BGM, 142.61]. Unter Finitismus versteht Wittgenstein Brouwers intuitionistischen (konstruktivistischen) Standpunkt, von dem er sich kurzzeitig hatte inspirieren lassen. Dessen mathematisches Programm beruht auf der Forderung, ein Beweis müsse konstruktiv sein, also zeigen, wie ein Objekt zu finden ist, dessen Existenz bewiesen wird. Die durch Weierstrass und Cantor verbreitete Methode des Widerspruchsbeweises wird daher abgelehnt. [Gef98, 152] An Brouwers philosophischem Standpunkt kritisiert Wittgenstein hier einen Dogmatismus, speziell das Leugnen realer mathematischer Objekte, am Behaviourismus das Leugnen mentaler Zustände („Prozesse“) [Gef98, 184]. Dagegen definiert er das Ziel seiner grammatischen Untersuchungen zur Mathematik:

> Was ich tue ist nicht Rechnungen als falsch zu erweisen: sondern das *Interesse* von Rechnungen einer Prüfung zu unterziehen... Ich darf also nicht sagen: 'So darf man ich nicht ausdrücken', oder 'Das ist absurd', oder 'Das ist uninteressant', sondern: 'Prüfe diesen Ausdruck in dieser Weise auf seine Berechtigung'. Man kann die Berechtigung eines Ausdrucks, *weil seine Verwendung*, damit nicht übersehen, daß man eine Facette seiner Verwendung ansieht; etwa ein Bild, das sich mit ihm verbindet.“ [BGM, 142.62]

6 Ausblick: Konsequenzen für mathematische Konzepte

Zum Schluss möchte ich noch einige Fragen dazu stellen, was Wittgensteins Erkenntnisse für die mathematische Praxis bedeuten können.

Es scheint schwierig, wichtige topologische Begriffe wie Abgeschlossenheit, Zusammenhang und Vollständigkeit [S. 10] von einer extensional-unendlichen Auffassung der Menge der reellen Zahlen zu lösen. Dann funktionieren auch viele Definitionen, Sätze und Beweise in darauf aufbauenden Disziplinen wie der Analysis und Funktionalanalysis nicht mehr, denn oft kann man kein Bildungsgesetz einer benötigten Größe angeben, sondern nur (etwa per Widerspruch) beweisen, dass sie existiert. Zwar lehnt Wittgenstein den Widerspruchsbeweis nicht generell ab; dass er jedoch den Begriff einer aktual unendlichen Menge als sinnlos ansieht und den Kalkül ins Zentrum stellt, bringt ihn in eine gewisse Nähe zum Konstruktivismus. Von einem solchen Standpunkt aus werden viele Beweise der klassischen Mathematik schwierig, und der größte Teil der Topologie und Mengentheorie kann überhaupt nicht konstruiert werden [Lav98, 180]. Gebiete wie die Theorie der unendlichen Kardinalzahlen sind jedoch vielleicht für die Anwendungen nicht von Bedeutung - zumindest behauptet Paul Lorenzen (1915-1994) dies für seinen konstruktiven Aufbau der Analysis in der Tradition Brouwers [Lor80, 118f.].

Wie ist Wittgensteins Verhältnis dazu? Nimmt man ihn beim Wort, müsste man sogar wegkommen von Mengen als grundlegenden mathematischen Objekten. So könnte seine Philosophie doch einschneidende Konsequenzen für mathematische Teilgebiete haben. Immerhin ist er an „Grundrissen möglicher Häuser“ [Kie97, 286 Anm. 1] interessiert - andere könnten dann den Neuaufbau der Mathematik selbst übernehmen.

Insgesamt hat er jedoch ein analytisches, nicht konstruktives Interesse und formuliert ohne Einschränkung: „Nicht ein neues Gebäude ist aufzuführen, oder eine neue Brücke zu schlagen. Sondern die Geographie, *wie sie jetzt ist*, zu beschreiben." [BGM 302.52.2]

Vielleicht lässt sich der Widerspruch so lösen: Wittgensteins Ergebnisse machen philosophische Neuinterpretationen der Mathematik nötig, seine Angriffe gegen die Mengenlehre insgesamt scheinen jedoch heute überholt, da sie zum bewährten Kernbestand der Mathematik gehört (zumindest gilt dies für die Unterscheidung abzählbarer und überabzählbarer Mengen). Diese Bemerkungen sind wohl auch nicht wesentlich für Wittgensteins Haltung, denn er lässt Kalküle wie Cantors Diagonalverfahren unangetastet [S. 18]. So konnte er sicher dessen berühmtem Zitat zustimmen: „Das Wesen der Mathematik liegt gerade in ihrer Freiheit." [Can79, Nr. 5 §8], [s. S. 6]

Selbst folgende Methode der „Kompaktifizierung" scheint dann akzeptabel: Die Werte $-\infty$ und $+\infty$ werden zur Menge der reellen Zahlen hinzugenommen. Damit erreicht man, dass ein Intervall $[a, \infty]$ abgeschlossen ist und die Menge $\mathbb{R}$ kompakt wird, d.h. jede Folge enthält eine konvergente Teilfolge.[34] Jedoch rechnet man nicht mit den Werten $\pm\infty$, sondern es sind lediglich zwei - beliebig zu nennende - Elemente, die zu $\mathbb{R}$ hinzugenommen werden, um topologische Aussagen zu vereinfachen. Die Formulierung dieser Methode kann unsinnige Interpretationen suggerieren, da eine Verwandtschaft zur von Wittgenstein abgelehnten Sicht von ∞ als letztem Glied der Reihe der natürlichen Zahlen besteht [S. 13]. Daher sollte sie vielleicht aus Gründen des mathematischen Stils abgelehnt werden. Man kann ihr jedoch einen klaren Sinn geben, da es eine genau beschriebene Verwendung gibt und diese nicht zwingend eine extensionale Auffassung des Unendlichen nötig macht. „Wenn sich jemand unter dem Schachkönig auch etwas Mystisches vorstellt, so kümmert uns das nicht, da er ja doch mit ihm nur auf den 8×8 Feldern des Schachbretts ziehen kann." [BT, 495.1]

Kann man die Mengentheorie im Wesentlichen beibehalten, aber eine (unendliche) Menge intensional verstehen, als Menge von Gesetzen zur Erzeugung von Elementen [Ms, 2.268.1], [S. 15], als „potentiell-unendliche Menge" [Lor80, 102] oder konstruiert durch Aussageformen [Lor80, 108f.]? Was ist dann mit Mengen wie den reellen Zahlen, deren Erzeugungsvorschriften unbestimmt sind? Oder müsste man mathematische Theorien doch umformulieren, weg vom „objektorientierten" Ansatz der Mengenlehre und hin zu einer konsequenter funktionalen, algorithmischen Beschreibung? Können etwa Brouwers Begründung der Mengenlehre (trotz Wittgensteins Kritik etwa an dessen philosophischer Auffassung des potential Unendlichen [S. 11]) oder Lorenzens Rekonstruktion der Analysis Ansätze sein?[35]

Dies betrachte ich als einen interessanten Ausgangspunkt einer weiteren Beschäftigung mit dem Thema „unendliche Mengen": Wittgensteins analytische Strenge und gleichzeitig Offenheit für die Vielfalt der Sprachspiele zu konfrontieren mit dem konstruktivistischen Anspruch, die Grundlagen der Mathematik als solcher neu zu bestimmen.

[34] Ein ähnliches Verfahren erwähnt Cantor als Ausgangspunkt seiner transfiniten Zahlenlehre und weist auf dadurch bewirkte Fortschritte in der Geometrie, Analysis und mathematischen Physik hin. [Can79, Nr. 5 §1], [Fußnote 5]

[35] Zur Forderung, ein Existenzbeweis müsse konstruktiv sein, s. [PG, 374]. Vgl. etwa [Gef98, 139-192] zu Brouwers Einflüssen auf Wittgenstein sowie Paul Lorenzen. *Differential und Integral: eine konstruktive Einführung in die klassische Analysis.* Akademische Verlagsges., Frankfurt/M., 1965.

Literatur

[Can32] Georg Cantor. *Gesammelte Abhandlungen*. Hg. Ernst Zermelo, Berlin, 1932.

[Can79] Georg Cantor. Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten. *Math. Annalen*, 15, 1879, 1-7; 17, 1880, 355-358; 20, 1882, 113-121; 21, 1883, 51-58 u. 545-586; 23, 1884, 453-488.

[Can90] Georg Cantor. Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre. *Jahresbericht der Deutsch. Math. Vereing.*, I:75–78, 1890-91.

[Can95] Georg Cantor. Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. *Math. Annalen*, 46, 1895, 481-512; 49, 1897, 207-246.

[Ded12] Richard Dedekind. *Stetigkeit und irrationale Zahlen*. Vieweg, Braunschweig, 4/1912.

[Gef98] Christoffer Gefwert. *Wittgenstein on mathematics, minds and mental machines*. Ashgate, Aldershot, 1998.

[Ger96] Steve Gerrard. *A philosophy of mathematics between two camps*, pages 171–197. In: Sluga, Hans and Stern, David G.. The Cambridge companion to Wittgenstein. Cambridge University Press, 1996.

[Glo00] Hans-Johann Glock. *Wittgenstein-Lexikon*. WBG, Darmstadt, 2000.

[HH90] Merrill B. und Jaako Hintikka. *Untersuchungen zu Wittgenstein*. Suhrkamp, Frankfurt/M., 1990.

[Hac97] Peter M.S. Hacker. *Wittgenstein im Kontext der analytischen Philosophie*. Suhrkamp, Frankfurt/M., 1997.

[Hil26] David Hilbert. Über das Unendliche. *Mathematische Annalen*, 95:161–190, 1926.

[Ker83] Andor Kertész. *Georg Cantor*. Barth, Leipzig, 1983.

[Kie97] Wolfgang Kienzler. *Wittgensteins Wende zu seiner Spätphilosophie 1930-1932*. Suhrkamp, Frankfurt/M., 1997.

[Lav98] Shaughan Lavine. *Understanding the infinite*. Harvard University Press, 2nd edition, 1998.

[Lor80] Paul Lorenzen. *Methodisches Denken*. Suhrkamp, Frankfurt/M., 2/1980.

[Wai96] Friedrich Waismann. *Einführung in das mathematische Denken*. WBG, Darmstadt, 1996.

Die verwendeten Texte Ludwig Wittgensteins werden zum einen zitiert nach der *Wiener Ausgabe* (Hg. M. Nedo). Springer, Wien, 1993ff.:

[Ms] Bd. 1-5: Manuskripte I-X. 1929-32.

[BT] Bd. 11: The Big Typescript. 1933.

Die übrigen Texte werden zitiert nach der *Werkausgabe* (Hg. G.E.M. Anscombe, R. Rhees, G.H. von Wright). Suhrkamp, Frankfurt/M., 1989:

[TLP]	Bd. 1: Tractatus logico-philosohicus. 1918.
[PU]	Bd. 1: Philosophische Untersuchungen. 1945-49.
[PB]	Bd. 2: Philosophische Bemerkungen.
[PG]	Bd. 4: Philosophische Grammatik.
[BGM]	Bd. 6: Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik. 1937-44.
[LPP]	Bd. 7: Letzte Schriften über die Philosophie der Psychologie.